1 Suites de fonctions

1.1

Etudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions suivantes :
a) $\frac{x}{x+n}$ sur $\mathbf{R}^+$;
b) $\frac{1}{1+n^2x^2}$ et $\frac{x}{1+n^2x^2}$. sur $\mathbf{R}$;
c) $\frac{1-x^n}{1+x^n}$ sur $\mathbf{R}$;
d) $f_n(x) = \sin(x)\exp(-nx)$ sur $\mathbf{R}^+$;
e) $f_n(x) = x^2\exp(-\sin(\frac{x}{n}))$ sur $\mathbf{R}$;
f) $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n\sqrt{x}}$ sur $]0, +\infty[$.
g) Etudier la suite de fonctions définies sur $\mathbf{R}$ pour $n \geq 1$ par $f_n(x) = \cos^n \frac{x}{\sqrt{n}}$.

1.2

Soit $f \in C_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. Etudier la suite de fonctions définie pour $n \geq 1$ par

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\int_0^n f(x+t)f(t)dt.$$

Montrer que sa limite F est bornée et à pour norme sup. $F(0)$.

1.3 Suite récurrente

On pose $f_0(t) = 0$, $f_{n+1}(t) = \sqrt{t + f_n(t)}$, pour $t \geq 0$.
1) déterminer la limite simple, ℓ, des fonctions f_n.
2) Y a-t-il convergence uniforme sur $\mathbf{R}^+$? 3) démontrer que : $\forall\, t > 0$, $|f_{n+1}(t) - l(t)| \leq \frac{|f_n(t) - l(t)|}{2f_{n+1}(t)}$.
4) En déduire que la suite (f_n) converge uniformément sur tout intervalle $[a, +\infty[$, avec $a > 0$.
(Remarquer que $f_n - l$ est bornée pour $n \geq 1$)

1.4

Soit a dans $\mathbf{R}$. On pose, pour x dans $]-1, 1[$, $f_0(x) = x$ et $f_{n+1}(x) = a + \sin(f_n(x))$. Etudier la convergence de f_n et la régularité de la limite.

Autre convolution $g_h(x) = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}$

2 Approximation

2.1

Soit $E = \mathbf{R}[X]$, $A \subset \mathbf{R}$, $A \neq \emptyset$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $P \mapsto \sup_{x \in A} |P(x)|$ soit une norme sur E. Cette condition étant supposée vérifiée, à quelle condition la forme linéaire $P \mapsto P(0)$ est-elle continue ?

2.2 Weierstrass

a) On définit une suite de polynômes (P_n) par
$P_o = 0$ et $\forall n, \quad P_{n+1}(x) = P_n(X) + \frac{1}{2}(x - P_n^2)$. Montrer que la suite (P_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers $x \mapsto \sqrt{x}$.
b) Montrer que l'application $x \to |x|$ est limite uniforme sur [-1,1] d'une suite de polynômes.

2.3

Montrer que $\mathrm{Vect}(t \mapsto t^{2n} \ ; \ n \in \mathbf{N})$ est dense dans $C^0([0,1], \mathbf{R})$ muni de la norme uniforme.

2.4 Approximation par des fractions rationnelles

Weier trigo

Soit $f \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ continue, ayant même limite finie l en $\pm\infty$. Montrer que f est limite uniforme sur $\mathbf{R}$ de fractions rationnelles.

2.5 Moyenne

On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions continues bornées de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{C}$, muni de la norme de la convergence uniforme. Soit F le sous-espace vectoriel de E constitué des fonctions f telles que $\frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)dx$ possède une limite lorsque T tend vers $+\infty$. Montrer que F est fermé dans E.

2.6

Soient $[a,b]$ un segment de $\mathbf{R}$, $f \in C([a,b], \mathbf{R})$.
a) On suppose f croissante. Montrer que f est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de polynômes croissants.

approche convolution → approche la dérivée

b) On suppose f convexe. Montrer que f est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de polynômes convexes.

3 Séries de fonctions

3.1

On définit une suite de fonctions sur $[0,1]$ par $f_0(x) = 1$ et $f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x (f_n(t - t^2)dt$. Etudier la convergence de f_n.

3.2

Soit $u_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right)$ et $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

1) Montrer que la série $f(x)$ converge simplement sur $\mathbf{R}^+$.

2) Majorer convenablement le reste de la série, et montrer qu'il y a convergence uniforme sur $\mathbf{R}^+$.

3) Y a-t-il convergence normale ?

3.3

Etudier la somme de la série de fonctions $\sum_{p\geq 1} \frac{1}{\sinh(px)}$: continuité, dérivabilité, équivalent en $+\infty$; donner de plus un équivalent en 0.

3.3.1 (Centrale)

Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^x e^{-nx}$. Domaine de définition. Equivalent en 0. Courbe représentative de f.

3.3.2 Fonction définie par une série

Soit $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(x+n)}$.

1) Déterminer le domaine, D de définition de g et prouver que g est de classe C^∞ sur D.

2) Montrer que la quantité : $xg(x) - g(x+1)$ est constante sur D.

3) Tracer la courbe représentative de g sur $]0, +\infty[$.

4) Donner un équivalent de $g(x)$ en $+\infty$ et en 0^+.

5) Montrer que, pour tout $x > 0$, $e.g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.

3.4

Soit $f(x) = \sum x^n \frac{\sin(nx)}{n}$. Montrer que f est de classe C^1 sur $]-1,1[$, calculer $f'(x)$ et montrer que $f(x) = \arctan(\frac{x\sin x}{1-x\cos x})$. En déduire les sommes des séries $\sum \frac{\sin(n)}{n}$ et $\sum \frac{(-1)^n \sin(n)}{n}$.

à méditer

3.5

Domaine de convergence puis continuité de la somme de $\sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1 + x^{2n} + y^{2n})$.